



VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ

BRNO UNIVERSITY OF TECHNOLOGY



FAKULTA STROJNÍHO INŽENÝRSTVÍ
ÚSTAV MECHANIKY TĚLES, MECHATRONIKY A
BIOMECHANIKY

FACULTY OF MECHANICAL ENGINEERING
INSTITUTE OF SOLID MECHANICS, MECHATRONICS AND
BIOMECHANICS

MODELOVÁNÍ KMITÁNÍ DYNAMICKÉ SOUSTAVY S VÍCE STUPNI VOLNOSTI

MODELLING OF DYNAMICS SYSTEMS WITH MULTI DEGREES OF FREEDOM

BAKALÁŘSKÁ PRÁCE

BACHELOR'S THESIS

AUTOR PRÁCE

AUTHOR

TOMÁŠ SVĚTNICKÝ

VEDOUCÍ PRÁCE

SUPERVISOR

Ing. DANIEL DUŠEK, Ph.D.

BRNO 2013

Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství

Ústav mechaniky těles, mechatroniky a biomechaniky

Akademický rok: 2012/2013

ZADÁNÍ BAKALÁŘSKÉ PRÁCE

student(ka): Tomáš Světnický

který/která studuje v **bakalářském studijním programu**

obor: **Strojní inženýrství (2301R016)**

Ředitel ústavu Vám v souladu se zákonem č.111/1998 o vysokých školách a se Studijním a zkušebním řádem VUT v Brně určuje následující téma bakalářské práce:

Modelování kmitání dynamické soustavy s více stupni volnosti

v anglickém jazyce:

Modelling of dynamics systems with multi degrees of freedom

Stručná charakteristika problematiky úkolu:

Dynamické systémy lze z hlediska mechaniky obecně diskretizovat na soustavy o n -diskrétních tělesech vzájemně propojených pružnými a tlumícími členy. Takto diskretizované soustavy s více stupni volnosti mají obecně n -vlastních tvarů a n -vlastních frekvencí, které lze zjistit řešením pohybové rovnice.

Cíle bakalářské práce:

Pro zadanou soustavu s více stupni volnosti sestavte a řešte pohybové rovnice pro různé vstupní hodnoty buzení a parametrů soustavy. Řešení ověřte pomocí MKP.

Seznam odborné literatury:

Slavík, J., Stejskal, V., Zeman, V., Základy dynamiky strojů, ČVUT Praha, Praha, 1997.

Kratochvíl, C., Slavík, J., Dynamika, VUT Brno, Brno, 1997.

Brepta, R., Půst, L., Turek, F., Mechanické kmitání, Sobotáles, Praha, 1994.

Vedoucí bakalářské práce: Ing. Daniel Dušek, Ph.D.

Termín odevzdání bakalářské práce je stanoven časovým plánem akademického roku 2012/2013.

V Brně, dne 19.11.2012

L.S.

prof. Ing. Jindřich Petruška, CSc.
Ředitel ústavu

prof. RNDr. Miroslav Doupovec, CSc., dr. h. c.
Děkan fakulty

ABSTRAKT

Cílem této práce je vytvořit na základě pohybových rovnic matematický model kmitající soustavy s více stupni volnosti. V úvodu je popsáno teoretické rozdělení dynamických kmitajících soustav a jejich hlavní vlastnosti. V další části je provedena analýza zadané soustavy a jsou sestaveny pohybové rovnice za pomoci Lagrangeových rovnic druhého druhu. Je uveden postup při řešení soustavy společně s použitými vztahy pro získání vlastních frekvencí, vlastních tvarů a výchylek těles v čase. Samotné řešení je uskutečněno v programu MAPLE, jsou sestaveny grafy amplitudové charakteristiky, fázové charakteristiky a závislosti výchylky těles na čase s diskuzí vlivu parametrů, které vstupují do výpočtu. Správnost analytického řešení je v závěru ověřena metodou konečných prvků v programu ANSYS.

ABSTRACT

The goal of this thesis is to create a mathematical model of multi-degree-of-freedom vibrating system based on motion equations. The introduction describes the theoretical distribution of dynamic vibrating systems and their main characteristics. The next part deals with the analysis of assigned system and the motion equations are constructed by using Lagrange equations of the second kind. The process of system solving is provided together with equations which were used for obtaining the natural frequencies, eigenmodes and amplitudes of objects in time. The actual solution is carried out in MAPLE software; graphs of amplitude characteristics, phase characteristics and objects amplitude in time are constructed. Influence of parameters entering the calculation is discussed. At the end is verified the accuracy of the analytical solution by the finite element method in ANSYS software.

KLÍČOVÁ SLOVA

Mechanické kmitání, více stupňů volnosti, vlastní frekvence, amplitudová charakteristika

KEYWORDS

Mechanical vibration, multi degrees of freedom, natural frequency, amplitude characteristics

BIBLIOGRAFICKÁ CITACE

SVĚTNICKÝ, T. *Modelování kmitání dynamické soustavy s více stupni volnosti*. Brno: Vysoké učení technické v Brně, Fakulta strojního inženýrství, 2013. 37 s. Vedoucí bakalářské práce Ing. Daniel Dušek, Ph.D..

ČESTNÉ PROHLÁŠENÍ

Prohlašuji, že jsem uvedenou bakalářskou práci vypracoval samostatně pod dohledem vedoucího a všechny použité zdroje jsem řádně označil a uvedl v přiloženém seznamu.

V Brně dne 24. 5. 2013

.....

Tomáš Světnický

PODĚKOVÁNÍ

Na tomto místě bych rád poděkoval vedoucímu mé bakalářské práce Ing. Danielu Duškovi Ph.D. za podnětné připomínky, cenné rady a pomoc při zpracování. Dále bych chtěl poděkovat Bc. Martinu Strakovi za uvedení do problematiky programu ANSYS.

OBSAH

ÚVOD.....	10
1 MECHANICKÉ KMITÁNÍ	11
1.1 Rozdělení podle použitého matematického modelu	11
1.1.1 Lineární soustavy.....	11
1.1.2 Nelineární soustavy	11
1.2 Rozdělení podle charakteru soustavy.....	11
1.2.1 Modely se soustředěnými parametry	11
1.2.2 Modely se spojitě rozloženými parametry.....	12
1.3 Rozdělení podle vzniku kmitání	12
1.3.1 Kmitání volné	12
1.3.2 Kmitání buzené.....	13
1.3.3 Kmitání samobuzené	13
1.4 Tlumení.....	13
2 ŘEŠENÁ SOUSTAVA	14
2.1 Schéma a specifikace zadané soustavy	14
2.2 Pohybové rovnice	15
3 POSTUP PŘI ŘEŠENÍ SOUSTAVY	17
3.1 Volné netlumené kmitání.....	17
3.2 Volné kmitání tlumené proporcionálně	20
3.3 Tlumené kmitání buzené harmonickou silou	22
4 VÝSLEDKY ŘEŠENÍ SOUSTAVY	24
4.1 Vliv budící síly.....	25
4.2 Vliv tlumení	28
4.3 Vliv propojení pružinami a jejich tuhostí	29
5 SROVNÁNÍ ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ S MKP	31
ZÁVĚR.....	34
SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ.....	35
SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ	36
SEZNAM PŘÍLOH	37

ÚVOD

V běžné inženýrské praxi se setkáváme se stroji a strojními zařízeními, jejichž chod podléhá dynamickým účinkům. Mezi nejvýraznější, obvykle nežádoucí dynamické účinky patří bezesporu kmitavé pohyby souhrnně nazývané kmitání. S rostoucí výkonností a provozní rychlostí stroje a se snižováním jeho hmotnosti se zvyšuje i toto kmitání. Škodlivost kmitání při běhu stroje se projevuje neúměrným namáháním jeho částí, zvýšenou hlučností a rostoucím opotřebením. Abychom mohli vliv kmitání co nejvíce omezit, je potřeba jej důkladně analyzovat a na základě této analýzy navrhnout vhodná opatření eliminující nežádoucí kmity. K analýze používáme různé matematické modely, jejichž řešením je nalezení vlastních frekvencí a vlastních tvarů zkoumané soustavy. Charakteristika, pomocí níž znázorňujeme vlastní frekvence, se nazývá amplitudo-frekvenční. Vedle nežádoucích účinků může být kmitání i užitečné, uměle vyvolané. Toto kmitání tvoří základ práce zhutňovačů, třídičů, vibračních dopravníků, vibračních pil apod. [2].

Popis kmitavých pohybů je tedy důležitým problémem technické praxe a analýza kmitavých pohybů dala vznik samostatné součásti dynamiky – teorii kmitání [6].

1 MECHANICKÉ KMITÁNÍ

Při analýze kmitající soustavy je nutné si uvědomit, jaký druh kmitání řešíme. Mechanické kmitání můžeme rozdělit do skupin podle mnoha hledisek. Například podle vzniku na volné, buzené a samobuzené kmitání, podle charakteru soustavy na modely se soustředěnými nebo spojitě rozloženými parametry, podle použitého matematického modelu na lineární a nelineární, podle disipované energie na tlumené a netlumené atd. Tato dělení lze pak zpřesňovat, např. podle počtu stupňů volnosti u soustavy se soustředěně rozloženými parametry [2]. Dále budou blíže popsána některá z těchto dělení.

1.1 Rozdělení podle použitého matematického modelu

1.1.1 Lineární soustavy

Reálné dynamické soustavy obvykle zjednodušíme na soustavy lineární. Lineární soustavy se vyznačují tím, že jejich chování lze popsat lineárními diferenciálními rovnicemi druhého řádu s konstantními koeficienty. Tyto rovnice platí za předpokladu, že síly, které vracejí tělesa do rovnovážných poloh, jsou lineárně úměrné výchylce a směrnice výchylky se během pohybu nemění. Dalším předpokladem je lineární závislost sil odporu prostředí, tj. třecích sil (vnějších i vnitřních) na rychlostech. U těchto soustav platí princip superpozice. Předpoklady nelze aplikovat na všechny reálné soustavy, a proto nemůžeme každou reálnou dynamickou soustavu popsat lineárně [6].

1.1.2 Nelineární soustavy

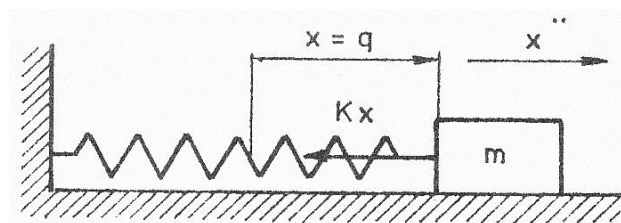
V reálných systémech jsou pružné i tlumící síly více či méně nelineární. Matematicky jsou nelineární pohyby vyjádřeny nelineárními členy v příslušné diferenciální rovnici. Nelineární závislost pružných a tlumících sil na výchylce, resp. na rychlosti výchylky souvisí s fyzikálními vlastnostmi materiálů. To, že se síly chovají nelineárně, je způsobeno buď použitím materiálů s odchylkami od Hookova zákona, nebo v důsledku materiálového tlumení (rychlý nárůst tlumících sil s rychlostí). Pro nelineární soustavy nelze využít princip superpozice [6].

1.2 Rozdělení podle charakteru soustavy

1.2.1 Modely se soustředěnými parametry

Tyto modely obsahují jednoduché (diskrétní) prvky, z nichž každý je nositelem konkrétní energie. Těmito prvky jsou hmotné body či tuhá hmotná tělesa, která jsou nositeli kinetické energie, nehmotné pružiny, jež jsou nositelkami potenciální energie, a nehmotné tlumiče, které disipují energii, tj. mění mechanickou energii na teplo. Výpočtové modely vznikají kombinací těchto prvků. Je nutné, aby tyto modely co nejvěrněji vystihovaly dynamické vlastnosti reálného díla. Modely se získávají vesměs z kontinua jeho diskretizací různými metodami, např. soustředěním hmotnosti kontinua do vhodně zvolených míst svázaných nehmotnými pružinami a tlumiči – model je poté schematicky zobrazitelný jako soustava hmotných bodů nebo tuhých těles. Mezi další možnosti diskretizace patří například použití metody konečných prvků. Pohybové rovnice lineárních soustav se soustředěnými parametry tvoří soustavy obyčejných diferenciálních rovnic (homogenních či nehomogenních, obvykle s konstantními koeficienty) s buzením na pravé straně [3].

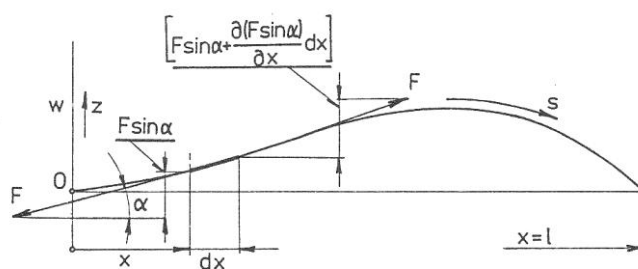
Hlavní vlastností modelů se soustředěnými parametry je konečný počet stupňů volnosti. Nejjednodušší je model s jedním stupněm volnosti (obr. 1-1). Používá se pro velmi hrubé přiblížení složitějších mechanických soustav v případech, kdy se zajímáme o nejnižší vlastní frekvence soustavy. Znalost řešení soustavy s jedním stupněm volnosti je základem pro řešení soustav s více stupni volnosti, a jeho pochopení je předpokladem pro studium složitějších soustav jak se soustředěnými parametry, tak se spojitě rozloženými parametry [2].



Obr. 1-1 Soustava s jedním stupněm volnosti [2]

1.2.2 Modely se spojitě rozloženými parametry

Stroje a strojní konstrukce jsou vždy objektem se spojitě nebo alespoň částečně spojitě rozloženou hmotou. U předchozího druhu modelu se celý objekt zjednodušil a popisoval diskrétními rovnicemi. To lze ovšem použít jen v takových případech, kdy se reálný objekt přibližuje diskrétnímu modelu. Celou řadu prvků ovšem nelze takto zjednodušeně znázornit, protože jejich konstrukce neobsahuje soustředěné hmoty. Jedná se o lana, pruty, struny (obr. 1-2), nosníky, desky, skořepiny, membrány apod. Každý stroj nebo strojní konstrukce je většinou tvořena různými konstrukčními prvky, každý o své vlastní frekvenci. Pokud dojde k porušení jednoho z těchto prvků, může dojít k porušení celé soustavy. Znalost kmitání jednoduchých prvků je proto u těchto soustav velice důležitá. Soustava se spojitě rozloženými parametry má nekonečný počet stupňů volnosti [2][4].



Obr. 1-2 Kmitající struna [3]

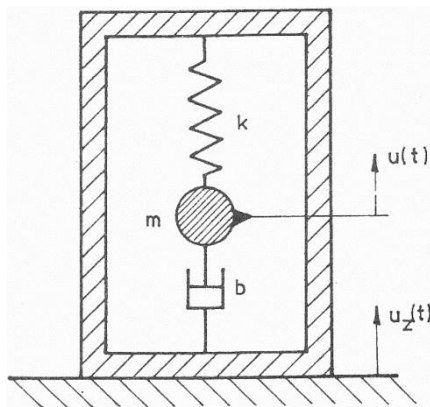
1.3 Rozdělení podle vzniku kmitání

1.3.1 Kmitání volné

Pokud je soustava po vychýlení z rovnováhy uvolněna a ponechána v pohybu bez účinků vnějších sil (bez buzení), vzniká volné kmitání. Vychýlení z rovnováhy nastane, pokud udělíme jednomu či více hmotným tělesům soustavy výchylku nebo rychlost, popř. obojí. Volné kmitání lze vypočítat z homogenních pohybových rovnic. Nenulové počáteční podmínky se uplatní při určování integračních konstant. Z tohoto výpočtu získáme vlastní hodnoty kmitající soustavy a informace o výchylkách a rychlostech kmitajících hmotných těles. Volné kmitání je u lineárních soustav lineární kombinací vlastních kmitů [3].

1.3.2 Kmitání buzené

Buzené neboli vynucené kmitání vzniká, když je pohyb soustavy vyvolán a udržován účinkem budících sil vnitřních nebo vnějších nebo je-li soustava buzena kinematicky (obr. 1-3). Za buzené kmitání se považuje i ustálené vynucené kmitání, vyvolané účinkem periodických sil nebo periodickým kinematickým buzením po utlumení přechodových dějů vzniklých při porušení rovnovážného stavu soustavy. Podle druhu buzení dělíme soustavy na soustavy s buzením deterministickým a soustavy s buzením stochastickým neboli náhodným. U deterministického buzení je významné především buzení periodické, harmonické a polyharmonické [3].



Obr. 1-3 Kinematicky buzená soustava
(princip seismografu) [3]

1.3.3 Kmitání samobuzené

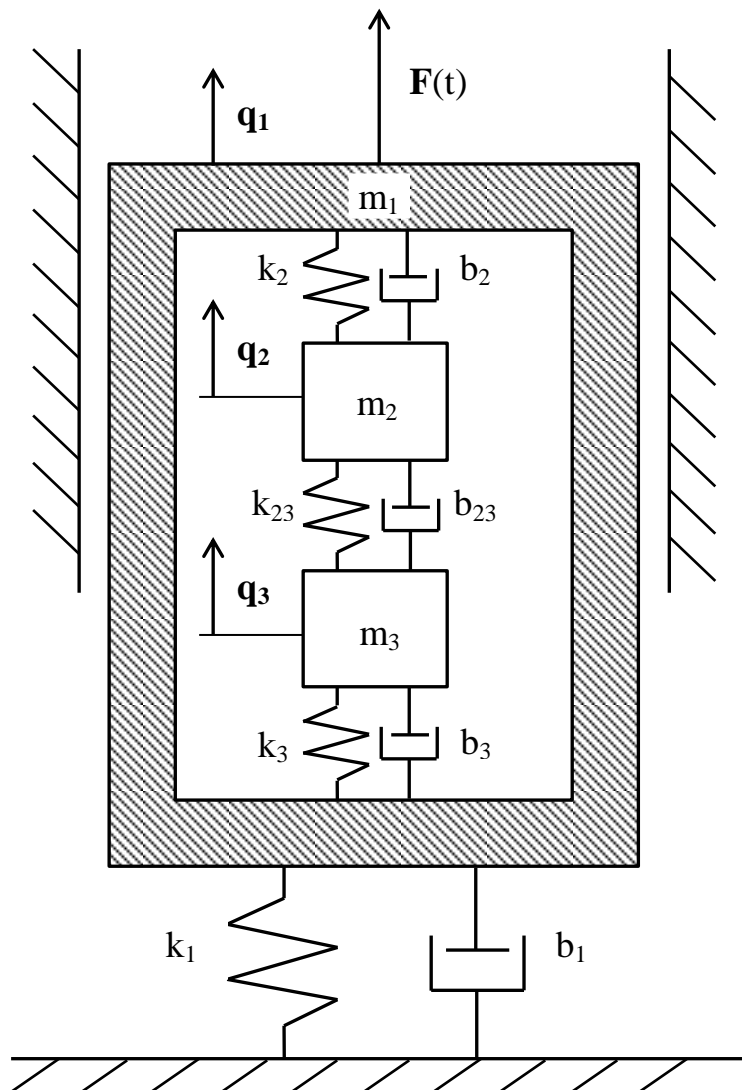
Samobuzené kmitání se udrží libovolně dlouho bez působení vnější periodické síly, potřebuje pouze zdroj energie (energie větru, proud vody atd.). Kmitající soustava si z tohoto zdroje energii sama odebírá. Ve většině strojních konstrukcích je samobuzené kmitání nežádoucí jev a snažíme se mu vyhnout (např. u ventilů, lopatek parních turbín, křídel letadla). Existuje však i využitelná forma tohoto kmitání, např. pneumatické kladivo v kombinaci s rotačním vibrátorem nebo dynamické experimenty, při kterých chceme udržet soustavu v intenzivním kmitání při měnících se vlastnostech s časem (růst trhliny v cyklicky namáhaném vzorku). Samobuzené kmitání vzniká často v soustavách, u nichž dochází k suchému tření mezi dvěma částmi [3].

1.4 Tlumení

Tlumení představuje působení odporů na kmitající soustavu, vlivem kterých se rozptýlí energie do okolí a poklesne výchylka a fázový posuv. Tlumení je důsledkem složitých nevratných procesů. Matematicky popisujeme tlumení v rovnici mechanické soustavy ekvivalentní silou působící proti směru pohybu. Z technického hlediska můžeme tlumení rozdělit na vnější tlumení (aerodynamický a hydrodynamický odpor, odpor tlumičů úmyslně vložených do soustavy), tlumení ve vazbách (pohyblivých i nepohyblivých – lisovaných, šroubovaných, nýtovaných a svařovaných) a tlumení vnitřní neboli materiálové (způsobeno vnitřním odporem materiálu) [2].

2 ŘEŠENÁ SOUSTAVA

2.1 Schéma a specifikace zadané soustavy



Obr. 2-1 Schéma zadané soustavy

Schéma (obr. 2-1) představuje kmitající dynamickou soustavu s diskrétními parametry se třemi stupni volnosti ($n=3$). Uvnitř dutého tuhého tělesa o hmotnosti m_1 se nacházejí dvě tuhá tělesa o hmotnostech m_2 a m_3 . Těleso 1 je připojeno k nehybnému rámu pomocí pružiny o tuhosti k_1 a tlumiče o součiniteli tlumení b_1 . Tělesa 2 a 3 jsou k dutému tělesu připojena a zároveň mezi sebou spojena pružinami o tuhostech k_2 , k_3 , k_{23} a tlumiči o součinitelích tlumení b_2 , b_3 , b_{23} . Pružiny i tlumiče uvažujeme lineární nehmotné. Těleso 1 je buzeno silou definovanou v čase harmonickou funkcí $F(t)$. Protože se v soustavě nacházejí pouze lineární prvky, jedná se o kmitání lineární. Polohy těles jsou určeny zobecněnými souřadnicemi q_1 , q_2 , q_3 . Tyto souřadnice určují výchylky ze stabilní rovnovážné polohy, jsou vzájemně nezávislé a jejich počet je stejný jako počet stupňů volnosti. Soustava kmitá pouze ve svislém směru.

2.2 Pohybové rovnice

K matematickému popisu zadané soustavy využijeme pohybových rovnic. Tyto rovnice lze sestavit několika způsoby, nejběžnější je však metoda uvolňování a metoda použití Lagrangeových rovnic 2. druhu. V této práci jsou pohybové rovnice sestaveny za pomoci druhé uvedené metody.

Tvar Lagrangeovy rovnice 2. druhu:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_j} + \frac{\partial E_D}{\partial \dot{q}_j} + \frac{\partial E_p}{\partial q_j} = Q_j(t) \quad \text{pro } (j = 1, 2, 3) \quad (2.1)$$

Vyjádříme kinetickou energii soustavy

$$E_k = \frac{1}{2} (m_1 \dot{q}_1^2 + m_2 \dot{q}_2^2 + m_3 \dot{q}_3^2) \quad (2.2)$$

disipativní funkci soustavy

$$E_D = \frac{1}{2} [b_1 \dot{q}_1^2 + b_2 (\dot{q}_2 - \dot{q}_1)^2 + b_3 (\dot{q}_1 - \dot{q}_3)^2 + b_{23} (\dot{q}_3 - \dot{q}_2)^2] \quad (2.3)$$

potenciální energii soustavy

$$E_p = \frac{1}{2} [k_1 q_1^2 + k_2 (q_2 - q_1)^2 + k_3 (q_1 - q_3)^2 + k_{23} (q_3 - q_2)^2] \quad (2.4)$$

a budící harmonické síly:

$$\begin{aligned} Q_1(t) = F(t) = F_0 e^{i\Omega t} &\Rightarrow Q_1 = F_0 \\ Q_2(t) = 0 &\Rightarrow Q_2 = 0 \\ Q_3(t) = 0 &\Rightarrow Q_3 = 0 \end{aligned} \quad (2.5)$$

Po dosazení do rov. (2.1), derivaci a elementárních úpravách dostaneme pohybové rovnice v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{q}_1 + (b_1 + b_2 + b_3) \dot{q}_1 - b_2 \dot{q}_2 - b_3 \dot{q}_3 + (k_1 + k_2 + k_3) q_1 - k_2 q_2 - k_3 q_3 &= F_0 \\ m_2 \ddot{q}_2 - b_2 \dot{q}_1 + (b_2 + b_{23}) \dot{q}_2 - b_{23} \dot{q}_3 - k_2 q_1 + (k_2 + k_{23}) q_2 - k_{23} q_3 &= 0 \\ m_3 \ddot{q}_3 - b_3 \dot{q}_1 - b_{23} \dot{q}_2 + (b_3 + b_{23}) \dot{q}_3 - k_3 q_1 - k_{23} q_2 + (k_3 + k_{23}) q_3 &= 0 \end{aligned} \quad (2.6)$$

Pohyb řešené soustavy se třemi stupni volnosti je tedy popsán třemi diferenciálními pohybovými rovnicemi druhého řádu. Protože řešení rovnic v tomto tvaru by bylo zdlouhavé a pracné, využíváme s výhodou zápis v maticovém tvaru a maticový počet pro řešení (výhodný pro numerické zpracování počítačem).

Maticový zápis [2]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (2.7)$$

kde \mathbf{q} je vektor polohy: $\mathbf{q} = [q_1, q_2, q_3]^T$, $\dot{\mathbf{q}}$ je vektor rychlosti a $\ddot{\mathbf{q}}$ vektor zrychlení.

\mathbf{M} je matice hmotnosti. Pro řešenou soustavu se jedná o čtvercovou diagonální matici řádu 3:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}$$

\mathbf{B} je matice tlumení. V našem případě jde o čtvercovou symetrickou matici řádu 3:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 + b_2 + b_3 & -b_2 & -b_3 \\ -b_2 & b_2 + b_{23} & -b_{23} \\ -b_3 & -b_{23} & b_3 + b_{23} \end{bmatrix}$$

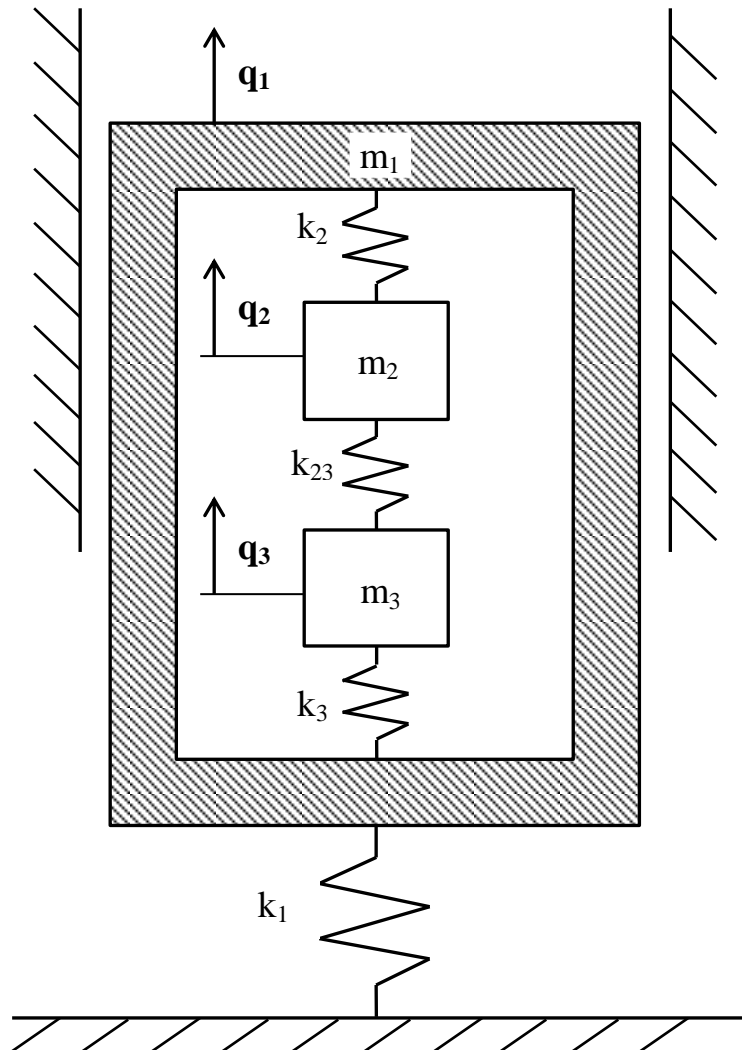
\mathbf{K} je matice tuhosti. Z důvodu paralelního řazení pružin a tlumičů má pro řešenou soustavu stejný tvar jako matice tlumení:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & k_2 + k_{23} & -k_{23} \\ -k_3 & -k_{23} & k_3 + k_{23} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{Q}(t)$ je vektor harmonických budících sil: $\mathbf{Q}(t) = [F_0, 0, 0]^T$.

3 POSTUP PŘI ŘEŠENÍ SOUSTAVY

3.1 Volné netlumené kmitání



Obr. 3-1 Schéma soustavy pro volné netlumené kmitání

Při řešení volného netlumeného kmitání uvažujeme soustavu bez budících sil ($\mathbf{Q}(t) = 0$) a tlumících prvků ($\mathbf{B} = 0$). Schéma takovéto soustavy je znázorněno na obr. 3-1. Pohybová rovnice (2.7) přejde tedy do tvaru [2]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (3.1)$$

Za předpokladu harmonického kmitání soustavy má řešení rov. (3.1) tvar:

$$\mathbf{q} = \mathbf{u}e^{i\Omega t} \quad (3.2)$$

kde \mathbf{u} je vektor amplitud harmonických kmitů: $\mathbf{u} = [u_1, u_2, \dots, u_n]^T$ a Ω je úhlová frekvence.

Postupnou derivací podle času získáme z rov. (3.2):

$$\ddot{\mathbf{q}} = -\Omega^2 \mathbf{u} e^{i\Omega t} \quad (3.3)$$

Dosazením rovnic (3.2) a (3.3) do rov. (3.1) a následným upravením dostaneme [2]:

$$(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

Rovnice (3.4) představuje problém vlastních hodnot. Nutnou a postačující podmínkou pro netriviální nenulové řešení soustavy je, aby determinant matice $(\mathbf{K} - \Omega^2 \mathbf{M})$ byl roven nule [5]:

$$\det|\mathbf{K} - \Omega_0^2 \mathbf{M}| = 0 \quad (3.5)$$

Determinant z rov. (3.5) nazýváme frekvenčním a jeho rozvinutím získáme charakteristickou (též frekvenční) rovnici n -tého stupně pro Ω_0^2 [2]:

$$a_n \Omega_0^{2n} + a_{n-1} \Omega_0^{2(n-1)} + \dots + a_1 \Omega_0^2 + a_0 = 0 \quad (3.6)$$

Kořeny této rovnice představují vlastní úhlové frekvence soustavy, které řadíme vzestupně:

$$0 \leq \Omega_{01} \leq \Omega_{02} \leq \dots \leq \Omega_{0n}$$

Pro pozitivně definitní matice \mathbf{M} a \mathbf{K} ($\mathbf{y}^T \mathbf{M} \mathbf{y} > 0$, $\mathbf{y}^T \mathbf{K} \mathbf{y} > 0$, \mathbf{y} je libovolný nenulový vektor) jsou vlastní úhlové frekvence reálné nezáporné hodnoty. Mechanická soustava může kmitat harmonicky pouze těmito frekvencemi. Dále platí [3]:

$$f_i = \frac{\Omega_{0i}}{2\pi} \text{ pro vlastní frekvenci v (Hz)}$$

$$T_i = \frac{2\pi}{\Omega_{0i}} \text{ pro dobu vlastního kmitu (s)}$$

Nyní hledáme vektory amplitud \mathbf{u} . Dosazením některé vlastní úhlové frekvence, např. Ω_{0r} , do rov. (3.4) bychom mohli získat odpovídající vektor amplitud [2]:

$$(\mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{M}) \mathbf{u}_r = 0 \quad (3.7)$$

Protože je matice $(\mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{M})$ singulární, vedl by takový postup k nekonečně mnoha řešením vektoru \mathbf{u}_r . Z tohoto důvodu lze určit pouze vzájemné poměry prvků vlastního vektoru \mathbf{u}_r , např. [4]:

$$\mathbf{v}_r^T = \left[\frac{u_{r1}}{u_{r1}}, \frac{u_{r2}}{u_{r1}}, \dots, \frac{u_{rn}}{u_{r1}} \right], \text{ nebo také } \mathbf{v}_r^T = \left[\frac{u_{r1}}{u_{r2}}, \frac{u_{r2}}{u_{r2}}, \dots, \frac{u_{rn}}{u_{r2}} \right], \text{ atd.}$$

Tímto způsobem lze nalézt n různých posloupností, které zapisujeme do tzv. vlastních vektorů nebo též modálních vektorů. Vlastní vektor \mathbf{v}_r popisuje vlastní tvar kmitání, kterým soustava volně kmitá úhlovou frekvencí Ω_{0r} . Obvykle volíme takový vlastní vektor, aby maxi-

mátní hodnota jeho prvku byla rovna jedné. Hovoříme o tzv. normování a požadujeme, aby platilo [4]:

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{v}_r = 1 \quad (\text{Euklidova norma})$$

nebo

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r = 1 \quad (\text{norma podle matice hmotnosti})$$

nebo

$$\mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r = 1 \quad (\text{norma podle matice tuhosti})$$

Při kmitání soustavy r-tým tvarem jsou jednotlivé výchylky určeny rovnicemi

$$\tilde{\mathbf{q}}_r = \mathbf{v}_r e^{i\Omega_{0r}t} \quad (3.8)$$

nebo v reálném oboru [2]:

$$\mathbf{q}_r = \mathbf{v}_r \sin(\Omega_{0r}t + \varphi_r) \quad (3.9)$$

Z rovnic (3.8) a (3.9) vyplývá, že se tvar kmitu v čase nemění díky konstantním amplitudám pohybu všech těles. Lineární kombinací jednotlivých vlastních tvarů kmitů získáme obecné řešení rov. (3.1)

$$\tilde{\mathbf{q}} = \sum_{r=1}^n \tilde{C}_r \mathbf{v}_r e^{i\Omega_{0r}t} \quad (3.10)$$

kde \tilde{C}_r jsou komplexní integrační konstanty. V oboru reálných hodnot má rov. (3.10) tvar [4]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n C_r \mathbf{v}_r \sin(\Omega_{0r}t + \varphi_r) \quad (3.11)$$

Integrační konstanty C_r , φ_r pro $r = 1, 2, \dots, n$ určíme z počátečních podmínek ($t = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0$) [4].

Vlastní vektory lze sestavit do tzv. modální matice [2]:

$$\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n] = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \dots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \dots & v_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v_{n1} & v_{n2} & \dots & v_{nn} \end{bmatrix}$$

Vlastní úhlové frekvence lze sestavit do spektrální matice [2]:

$$\mathbf{\Omega}_0^2 = \begin{bmatrix} \Omega_{01}^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Omega_{02}^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \Omega_{0n}^2 \end{bmatrix}$$

Důležitou vlastností vlastních vektorů je jejich ortogonalita. Formální úpravou rov. (3.7) obdržíme:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^T (\mathbf{K} - \Omega_{0r}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_r &= 0 \\ \mathbf{v}_s^T (\mathbf{K} - \Omega_{0s}^2 \mathbf{M}) \mathbf{v}_r &= 0 \end{aligned} \quad (3.12)$$

Z jejich součtu a rozdílu plyne:

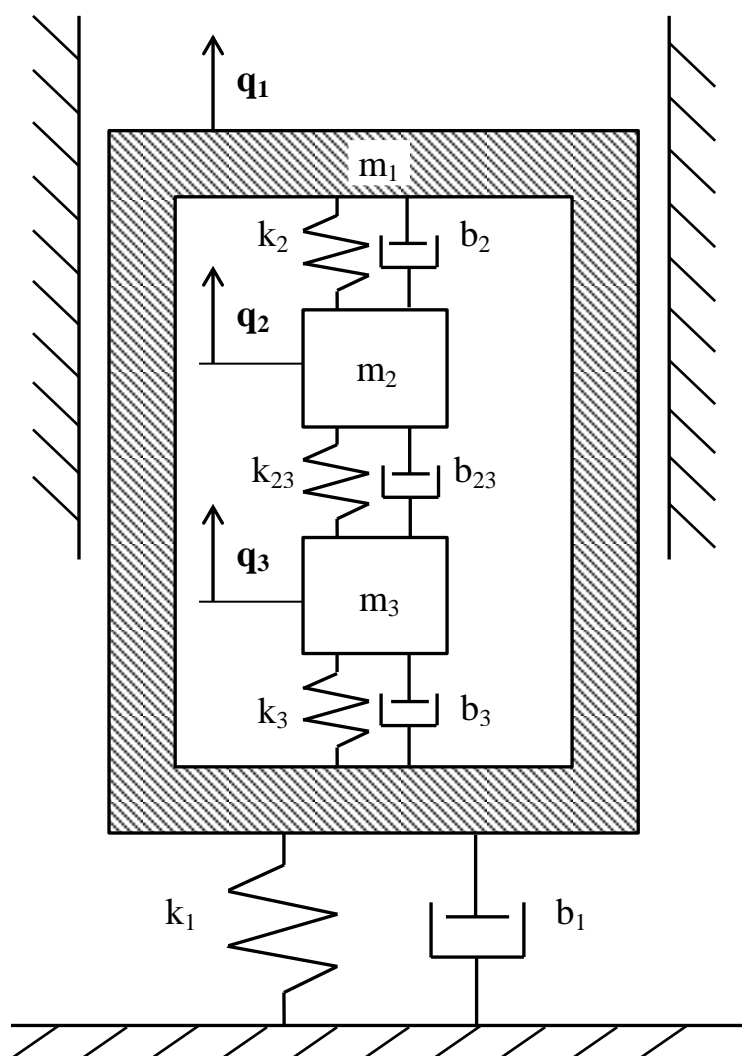
$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^T [2\mathbf{K} - (\Omega_{0r}^2 + \Omega_{0s}^2) \mathbf{M}] \mathbf{v}_r &= 0 \\ \mathbf{v}_s^T [-(\Omega_{0r}^2 - \Omega_{0s}^2) \mathbf{M}] \mathbf{v}_r &= 0 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Jelikož $(\Omega_{0r}^2 + \Omega_{0s}^2) \neq 0$ a $(\Omega_{0r}^2 - \Omega_{0s}^2) \neq 0$ platí:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_s^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r &= 0 \quad r, s = 1, \dots, n \\ \mathbf{v}_s^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r &= 0 \quad r \neq s \end{aligned} \quad (3.14)$$

Z toho plyne, že vlastní vektory \mathbf{v}_r , \mathbf{v}_s příslušné různým vlastním hodnotám Ω_{0r} , Ω_{0s} jsou ortogonální k matici hmotnosti \mathbf{M} a tuhosti \mathbf{K} , tj. \mathbf{M} -ortogonální a \mathbf{K} -ortogonální [3].

3.2 Volné kmitání tlumené proporcionálně



Obr. 3-2 Schéma soustavy pro volné tlumené kmitání

Při řešení volného tlumeného kmitání uvažujeme soustavu s nulovými budícími silami ($\mathbf{Q}(t) = 0$, obr. 3-2) a rovnice (2.7) má tvar [2]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = 0 \quad (3.15)$$

Chceme-li naplnit matici \mathbf{B} jednotlivými konstantami tlumení, narážíme na problém, protože tyto konstanty zpravidla neznáme a nelze je ani jednoduše určit. Tuto skutečnost se snažíme obejít nějakým hypotetickým tlumením s jednoduchým vyjádřením jak samotné matice tlumení \mathbf{B} , tak i podmínek ortogonality. Jedná se o tzv. proporcionální tlumení. Proportionální tlumení vztažené k matici hmotnosti a tuhosti vyjádříme vztahem [4]:

$$\mathbf{B} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (3.16)$$

kde $\alpha\mathbf{M}$ představuje konstrukční tlumení závislé na rozložení hmotnosti v soustavě a $\beta\mathbf{K}$ nahrazuje materiálové tlumení, které je funkcí vnitřních materiálových vlastností. Podmínky ortogonality vlastních vektorů jsou opět dány rov. (3.14), a navíc k nim přibude ještě jedna podmínka [4]:

$$\mathbf{v}_s^T \mathbf{B} \mathbf{v}_r = 0 \quad r \neq s \quad (3.17)$$

K řešení rov. (3.15) využijeme znalost pohybu a vlastních vektorů netlumeného systému ($\alpha = 0, \beta = 0$) a budeme jej předpokládat ve tvaru [4]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r \quad (3.18)$$

Dosadíme-li rov. (3.18) do rov. (3.15), dostaneme:

$$\mathbf{M} \sum_{r=1}^n \lambda_r^2 C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r + \mathbf{B} \sum_{r=1}^n \lambda_r C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r + \mathbf{K} \sum_{r=1}^n C_r e^{\lambda_r t} \mathbf{v}_r = 0 \quad (3.19)$$

Využitím podmínek ortogonality, kdy vynásobíme rov. (3.19) zleva vektorem \mathbf{v}_s^T , se zbavíme sumací [4]:

$$C_r (\mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r \lambda_r^2 + \mathbf{v}_r^T \mathbf{B} \mathbf{v}_r \lambda_r + \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r) e^{\lambda_r t} = 0 \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (3.20)$$

K netriviálnímu řešení se dostaneme položením výrazu v závorce rovno nule, rov. (3.20) musí platit nezávisle na čase. Když označíme

$$\begin{aligned} m_{yr} &= \mathbf{v}_r^T \mathbf{M} \mathbf{v}_r \\ k_{yr} &= \mathbf{v}_r^T \mathbf{K} \mathbf{v}_r \end{aligned} \quad (3.21)$$

a matici tlumení vyjádříme rovnicí (3.16), dostaneme:

$$m_{yr} \lambda_r^2 + (\alpha m_{yr} + \beta k_{yr}) \lambda_r + k_{yr} = 0 \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (3.22)$$

Z rov. (3.22) můžeme určit kořeny λ_r [2]:

$$(\lambda_r)_{1,2} = -\delta_r \pm i\Omega_r \quad (3.23)$$

přičemž platí [2]:

$$\begin{aligned} \delta_r &= \frac{\alpha m_{yr} + \beta k_{yr}}{2m_{yr}} \\ \Omega_r &= \sqrt{\Omega_{0r}^2 - \delta_r^2} \\ \Omega_{0r} &= \sqrt{\frac{k_{yr}}{m_{yr}}} \end{aligned} \quad (3.24)$$

Rov. (3.23) přiřazuje ke každému vlastnímu vektoru \mathbf{v}_r dvě vlastní hodnoty λ_r . Obecné řešení rov. (3.18) bude mít potom tvar [4]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n (C_{1r} e^{\lambda_{r1} t} + C_{2r} e^{\lambda_{r2} t}) \mathbf{v}_r \quad (3.25)$$

Pokud platí, že $\Omega_{0r} > \delta_r$, budou kořeny $(\lambda_r)_{1,2}$ komplexně sdružené a výsledný periodický pohyb bude vyjádřen rovnicí [4]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n e^{-\delta_r t} (A_r \cos \Omega_r t + B_r \sin \Omega_r t) \mathbf{v}_r \quad (3.26)$$

nebo

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n C_r e^{-\delta_r t} \sin(\Omega_r t + \varphi_r) \mathbf{v}_r \quad (3.27)$$

Integrační konstanty C_{1r} , C_{2r} , A_r , B_r , C_r , φ_r vyjádříme z počátečních podmínek ($t = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0$) [4].

3.3 Tlumené kmitání buzené harmonickou silou

Schéma vynuceného tlumeného kmitání buzeného harmonickou silou představuje obr. 2-1. V praxi se často setkáváme právě s tímto kmitáním. Zadanou soustavu můžeme řešit v plném rozsahu. Uvažujeme tedy úplnou rov. (2.7):

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B}\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{Q}(t) \quad (3.28)$$

Obecné řešení této diferenciální rovnice druhého řádu s pravou stranou se skládá z řešení homogenního a partikulárního [2]:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_h + \mathbf{q}_p \quad (3.29)$$

Homogenní řešení je dáno rov. (3.27). Jelikož předpokládáme harmonickou budící sílu, kdy $\mathbf{Q}(t) = \mathbf{Q}_0 e^{i\omega t}$, bude mít partikulární řešení tvar [2]:

$$\mathbf{q}_p = \tilde{\mathbf{s}} e^{i\omega t} \quad (3.30)$$

kde $\tilde{\mathbf{s}}$ je komplexní vektor amplitud. Dosadíme-li rov. (3.30) do rov. (3.28), obdržíme po úpravě:

$$(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B}) \tilde{\mathbf{s}} = \mathbf{Q}_0 \quad (3.31)$$

Z této rovnice snadno vyjádříme komplexní vektor amplitud odezvy inverzí matice $(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})$ [2]:

$$\tilde{\mathbf{s}} = (\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M} + i\omega \mathbf{B})^{-1} \mathbf{Q}_0 \quad (3.32)$$

Reálné hodnoty amplitud odezvy jsou dány vztahem [4]:

$$s_{0r} = \sqrt{(\operatorname{Re}\{\tilde{s}_r\})^2 + (\operatorname{Im}\{\tilde{s}_r\})^2} \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (3.33)$$

Fáze odpovídající těmto amplitudám jsou vyjádřeny vztahem [4]:

$$\varphi_{pr} = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}\{\tilde{s}_r\}}{\operatorname{Re}\{\tilde{s}_r\}} \quad \text{pro } r = 1, 2, \dots, n \quad (3.34)$$

Celkovou odezvu soustavy buzené harmonickou silou lze vyjádřit v reálném tvaru takto [4]:

$$\mathbf{q} = \sum_{r=1}^n [C_r e^{-\delta_r t} \sin(\Omega_r t + \varphi_r) \mathbf{v}_r + \mathbf{s}_r \sin(\omega t + \varphi_{pr})] \quad (3.35)$$

Integrační konstanty C_r a φ_r určíme opět z počátečních podmínek ($t = 0$, $\mathbf{q} = \mathbf{q}_0$, $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\mathbf{q}}_0$). Protože homogenní řešení vychází z proporcionálně tlumeného kmitání, musíme toto tlumení uvažovat i zde.

4 VÝSLEDKY ŘEŠENÍ SOUSTAVY

Zadaná dynamická soustava byla vyřešena s využitím vztahů uvedených v předchozích kapitolách za pomoci programu pro matematické výpočty MAPLE (verze 16) a jeho knihovny LinearAlgebra. Řešení je koncipováno tak, aby bylo možno na začátku změnit vstupní parametry soustavy, tzn. hmotnosti těles, tuhosti pružin, konstanty proporcionálního tlumení α a β a amplitudy budících sil. V dalších částech jsou postupně vypočítány vlastní frekvence pro volné i tlumené kmitání. Vykreslena je amplitudová a fázová charakteristika a časová závislost průběhu výchylek těles při daných počátečních podmínkách.

Parametry soustavy:

hmotnosti těles:

$$m_1 = 4 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1 \text{ kg}$$

$$m_3 = 1 \text{ kg}$$

tuhosti pružin:

$$k_1 = 50 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k_2 = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k_{23} = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

$$k_3 = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

konstanty propor. tlumení:

$$\alpha = 0,5 \text{ s}^{-1}$$

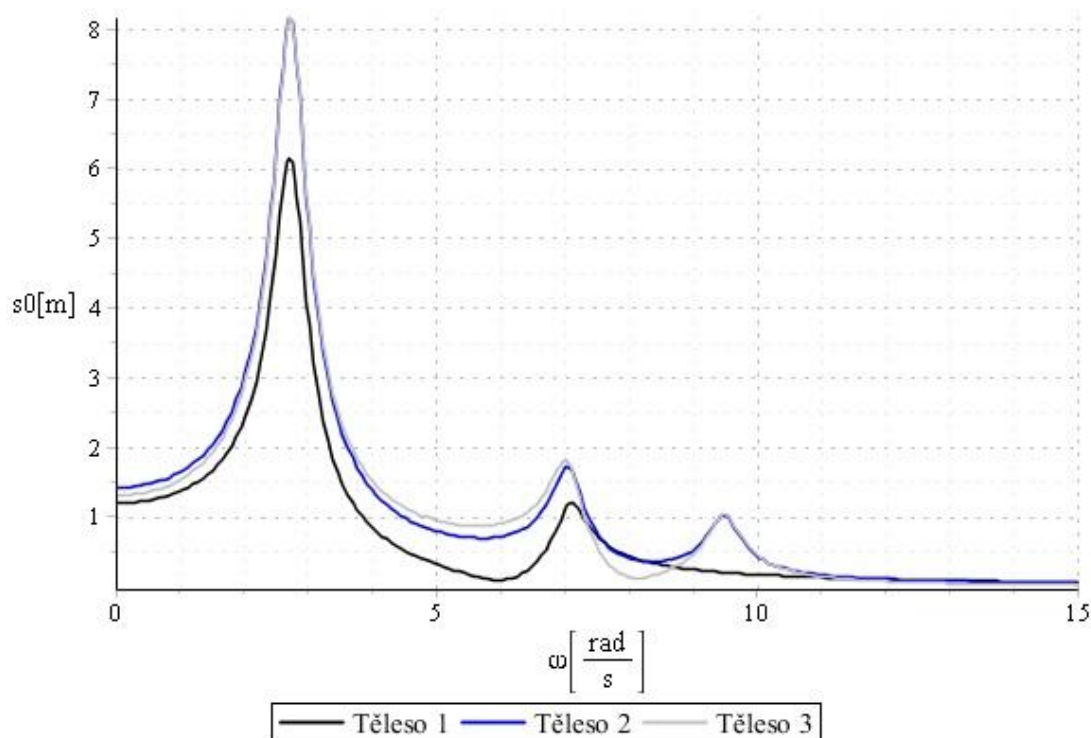
$$\beta = 0,0001 \text{ s}$$

budící síly:

$$F_1(t) = 50 \cdot (\cos \omega t + 0)$$

$$F_2(t) = 10 \cdot (\cos \omega t + 0)$$

Budící síla na tělese 2 je přidána z důvodu znázornění průběhu výchylek všech těles, pokud by bylo za daných parametrů buzeno pouze těleso 1, charakteristiky zbylých dvou těles splynou.



Obr. 4-1 Amplitudová charakteristika

Amplitudová charakteristika (obr. 4-1) představuje závislost výchylek těles na úhlové frekvenci budící síly. Pro hodnotu úhlové frekvence budící síly, která je rovna vlastní úhlové frekvenci některého z těles, roste výrazně amplituda daného tělesa společně s výchylkami těles ostatních. Důvodem je propojení všech těles pružinami a daný stav se nazývá rezonance. Z řešení soustavy určíme vlastní úhlové frekvence těles:

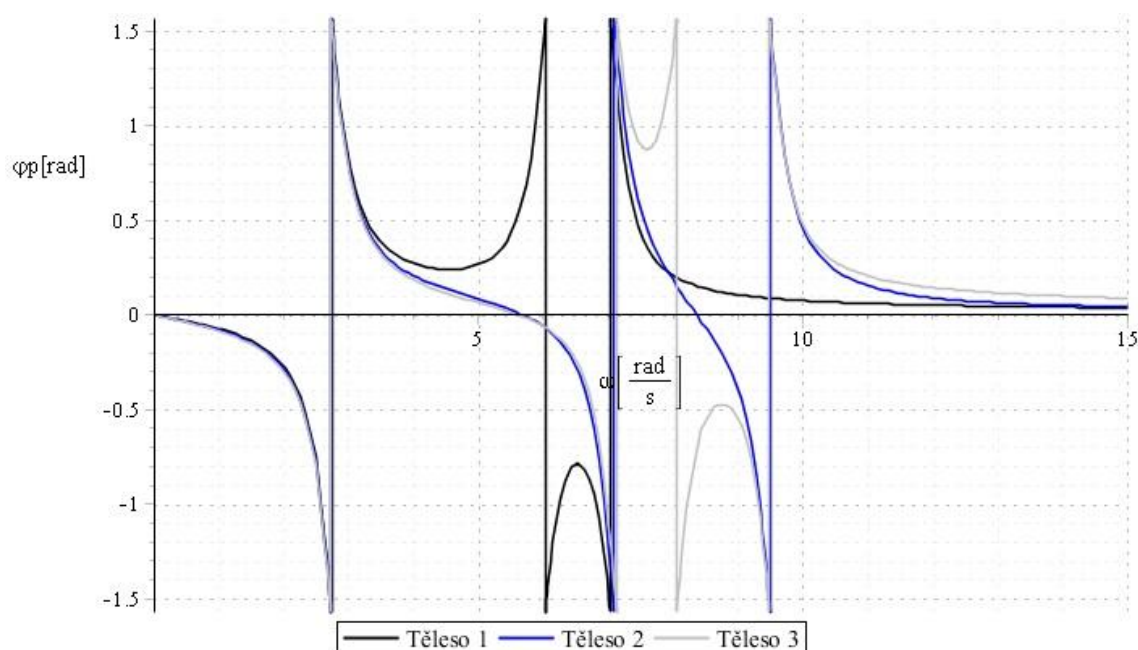
$$\Omega_{01} = 2,73 \text{ rad. s}^{-1}$$

$$\Omega_{02} = 7,07 \text{ rad. s}^{-1}$$

$$\Omega_{03} = 9,48 \text{ rad. s}^{-1}$$

Na obr. 4-1 můžeme pozorovat, že pro stejné hodnoty úhlové frekvence budící síly výchylka skutečně roste.

Fázová charakteristika představuje závislost fáze odezvy na budící úhlové frekvenci (obr. 4-2):



Obr. 4-2 Fázová charakteristika

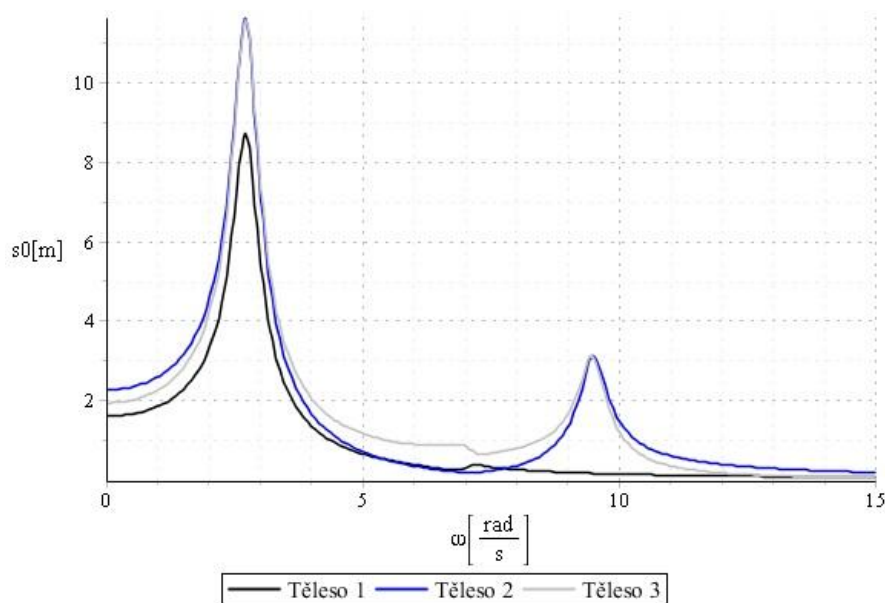
4.1 Vliv budící síly

Při změně amplitudy budící síly se bude měnit výchylka těles v amplitudové charakteristice. Zvyšováním (snižováním) amplitudy budící síly $F_1(t)$ se bude zvyšovat (snižovat) i výchylka těles pro hodnotu nejnižší a druhé vlastní frekvence.

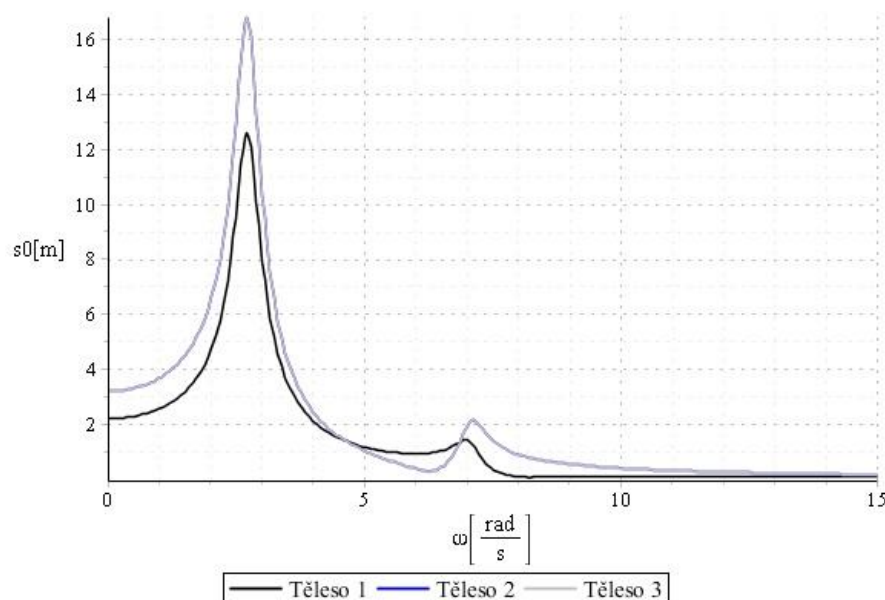
Změna velikosti amplitudy budící síly $F_2(t)$ má vliv především na výchylku všech těles pro hodnotu nejnižší vlastní frekvence. Mění se také výchylka těles 2 a 3 pro hodnotu nejvyšší vlastní frekvence (obr. 4-3).

Přidáním budící síly na těleso 3 o stejné velikosti jako $F_2(t)$ budou amplitudové charakteristiky těles 2 a 3 totožné (obr. 4-4). Systém se v takové situaci chová, jako by měl pouze dva stupně volnosti, tzn. i dvě vlastní frekvence. Vliv nejvyšší vlastní frekvence je zanedbatelný.

Kvůli propojení těles pružinami se ovlivňují tedy i budící síly navzájem.

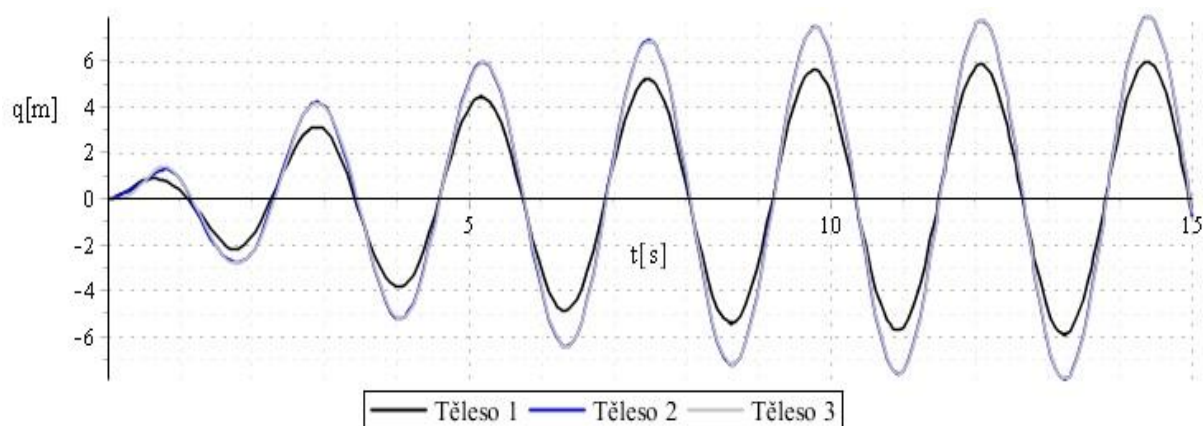


Obr. 4-3 Amplitudová charakteristika – vliv budící síly $F_2(t)$

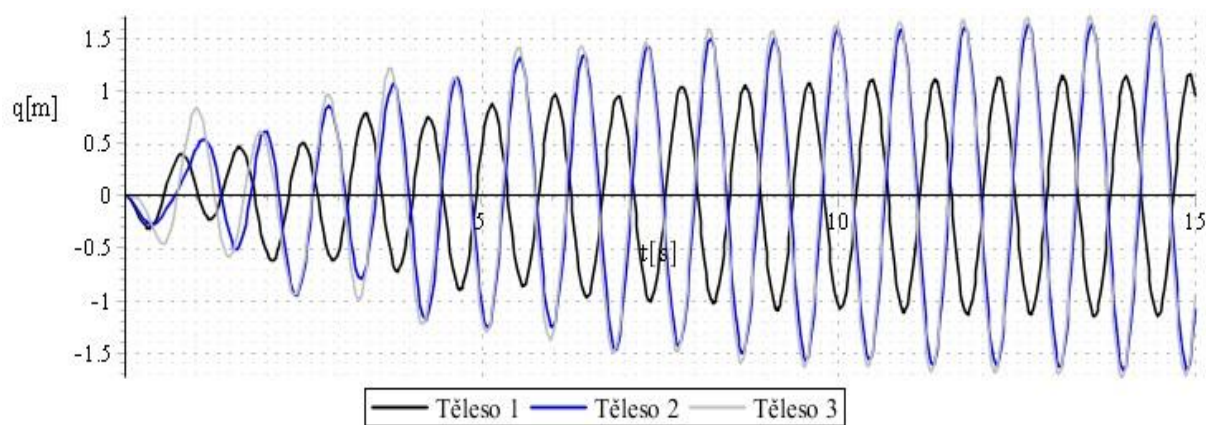


Obr. 4-4 Amplitudová charakteristika – stejně velké budící síly na tělesech 2 a 3

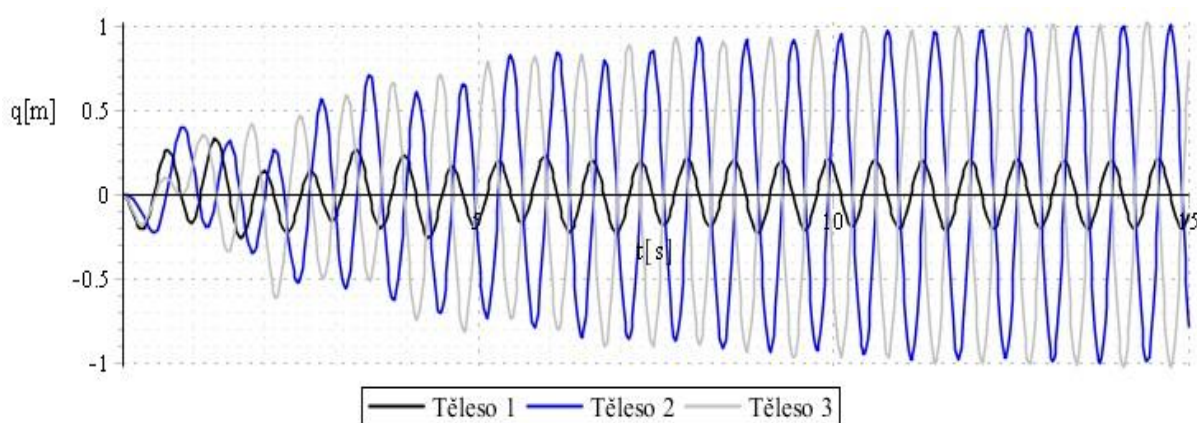
Velikost výchylky těles v grafech časové závislosti se odvíjí od velikosti úhlové frekvence budící síly. Pokud má tato frekvence rezonanční hodnotu (je rovna úhlové frekvenci některého z těles), je výchylka výrazně vyšší než u nerezonanční frekvence. Amplituda kmitů se díky tlumení ustálí na konečné hodnotě, kterou můžeme odečíst i z grafu amplitudové charakteristiky. V následující části jsou vykresleny grafy výchylek těles pro rezonanční budící frekvence, počáteční podmínky jsou nulové. Můžeme pozorovat, že těmito frekvencemi kmitá soustava harmonicky a perioda se zmenšuje se vzrůstající budící frekvencí.



Obr. 4-5 Výchylka těles v závislosti na čase pro první rezonanční frekvenci



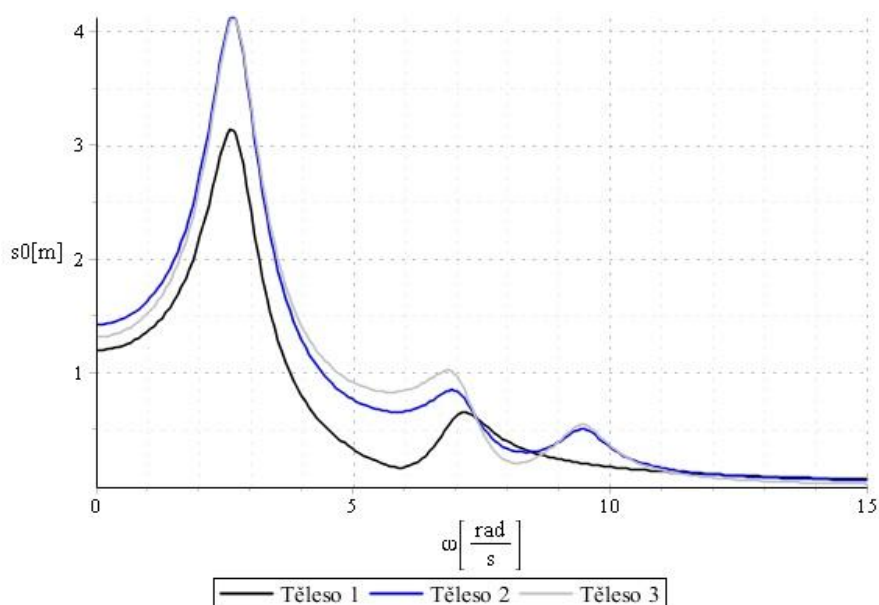
Obr. 4-6 Výchylka těles v závislosti na čase pro druhou rezonanční frekvenci



Obr. 4-7 Výchylka těles v závislosti na čase pro třetí rezonanční frekvenci

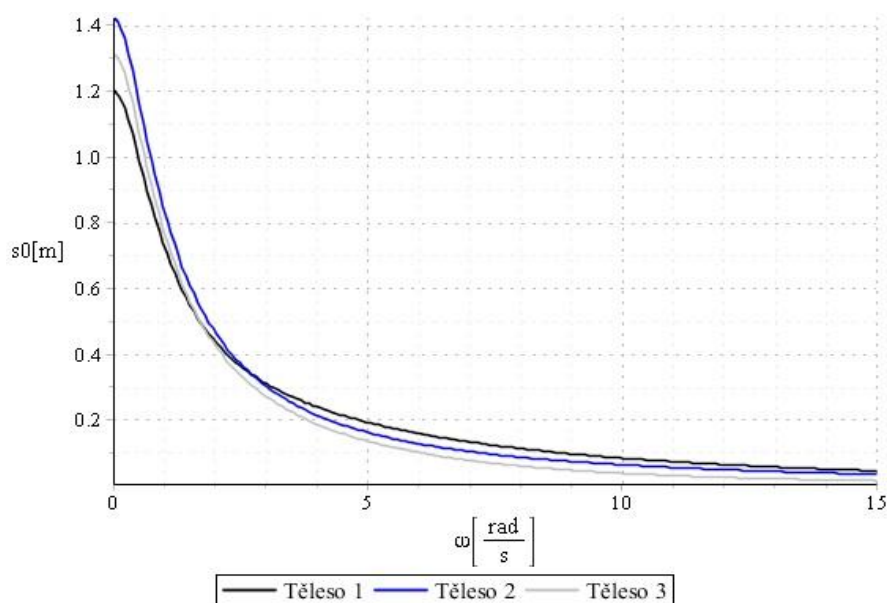
4.2 Vliv tlumení

Pro všechny předchozí případy byly konstanty tlumení α a β zvoleny tak, aby v rov. (3.24) platilo $\delta_r < \Omega_r$. Jedná se o tzv. podkritické tlumení. Změna konstant proporcionálního tlumení se v amplitudové charakteristice projeví změnou velikosti výchylek všech těles. Pro větší tlumení bude menší výchylka a dojde ke stírání přechodů mezi jednotlivými rezonančními frekvencemi (obr. 4-8). Pro menší tlumení bude výchylka větší a oblasti mezi rezonančními frekvencemi jasně vyhraní amplitudové špičky.



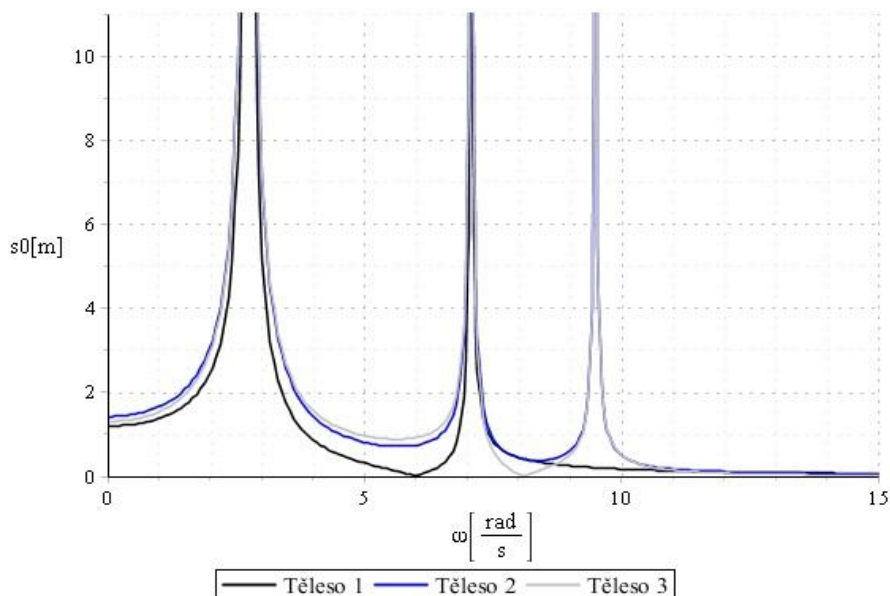
Obr. 4-8 Amplitudová charakteristika pro konstanty tlumení $\alpha=1s^{-1}$, $\beta=0,0001s$

Pokud bude tlumení tak velké, že potlačí všechny vlastní frekvence těles a neumožní soustavě dostat se do rezonance, bude v rov. (3.24) platit $\delta_r > \Omega_r$. Takové tlumení se nazývá nadkritické (obr. 4-9).



Obr. 4-9 Amplitudová charakteristika pro nadkritické tlumení

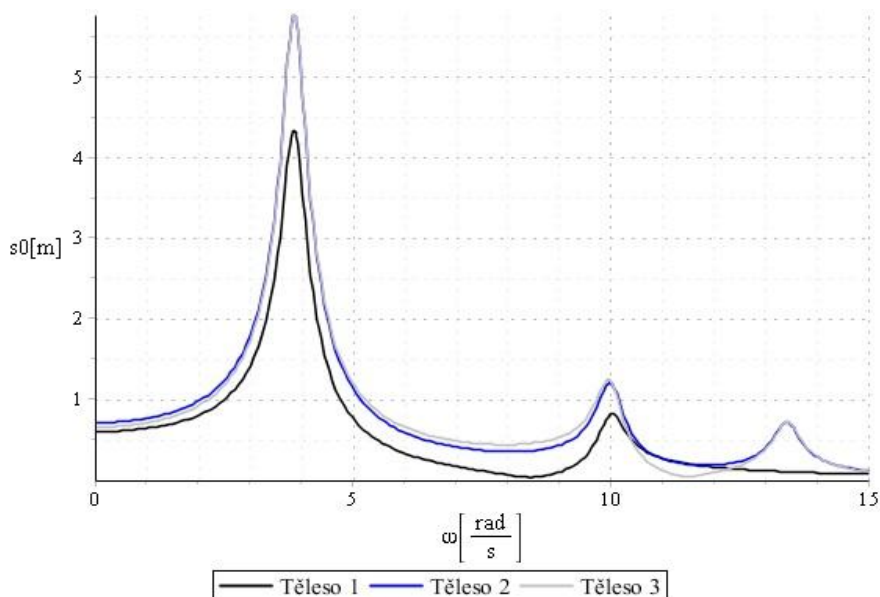
Pro případ, kdy by soustava nebyla tlumena vůbec, roste velikost výchylek pro rezonanční frekvence do nekonečna (obr. 4-10). Takový stav je ovšem pouze teoretický, protože každá soustava je tlumena působením odporových sil nebo vlastním odporem materiálu. V rov. (3.24) platí pro soustavu bez tlumení $\delta_r = 0$.



Obr. 4-10 Amplitudová charakteristika pro soustavu bez tlumení

4.3 Vliv propojení pružinami a jejich tuhostí

Zvýšení tuhosti pružin v zadané soustavě zapříčiní vyšší vlastní frekvence těles a menší výchylky v amplitudové charakteristice (obr. 4-11), snížení tuhosti vede k nižším vlastním frekvencím a větším výchylkám.

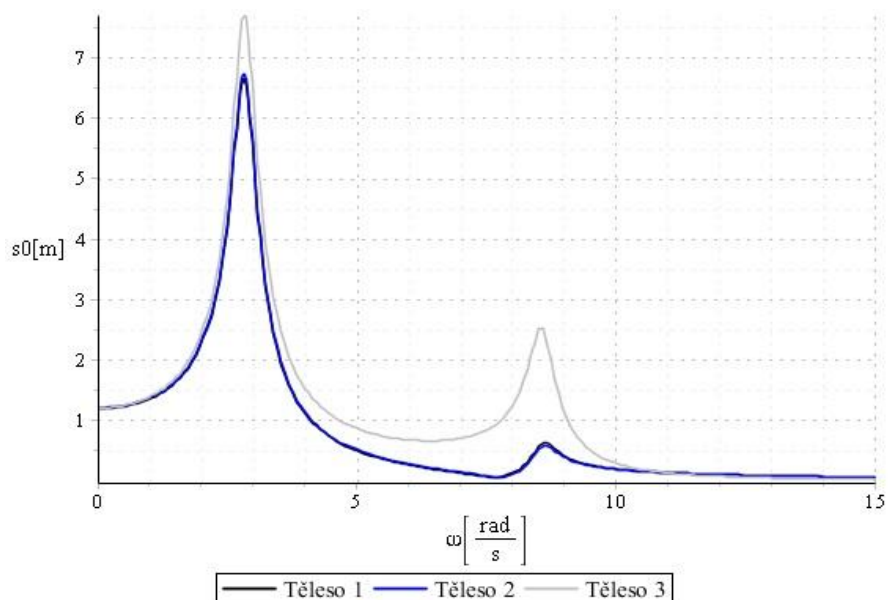


Obr. 4-11 Amplitudová charakteristika – změna tuhosti pružin

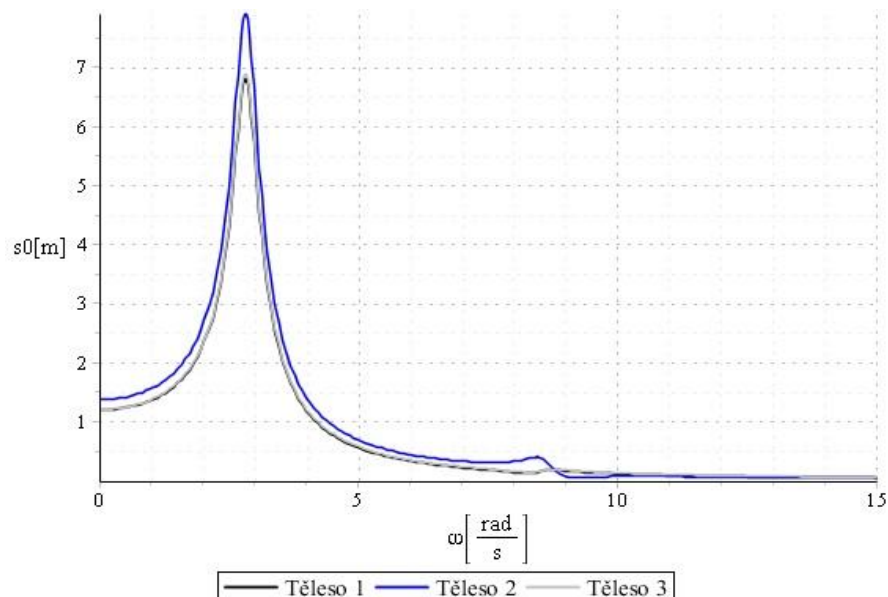
Vzhledem ke komplexnímu propojení soustavy pružinami a jejich sériovému řazení ovlivní změna tuhosti samostatné pružiny téměř celou soustavu.

Při vysokém zvýšení tuhosti některé z pružin, která spojuje dvě tělesa, se začnou tato tělesa chovat jako jedno (obr. 4-12 a 4-13). Charakteristika těles 2 a 3 je totožná vždy, když mají tělesa stejnou hmotnost, jsou buzena stejně velkými silami a pružiny k_2 a k_3 mají stejnou tuhost (viz obr. 4-4).

Limitní případ zvýšení tuhosti pružin uvnitř tělesa 1 by vedl k soustavě s jedním stupněm volnosti, kdy by byla výrazná výchylka pouze pro nejnižší vlastní frekvenci.



Obr. 4-12 Amplitudová charakteristika – změna tuhosti pružiny mezi tělesy 1 a 2

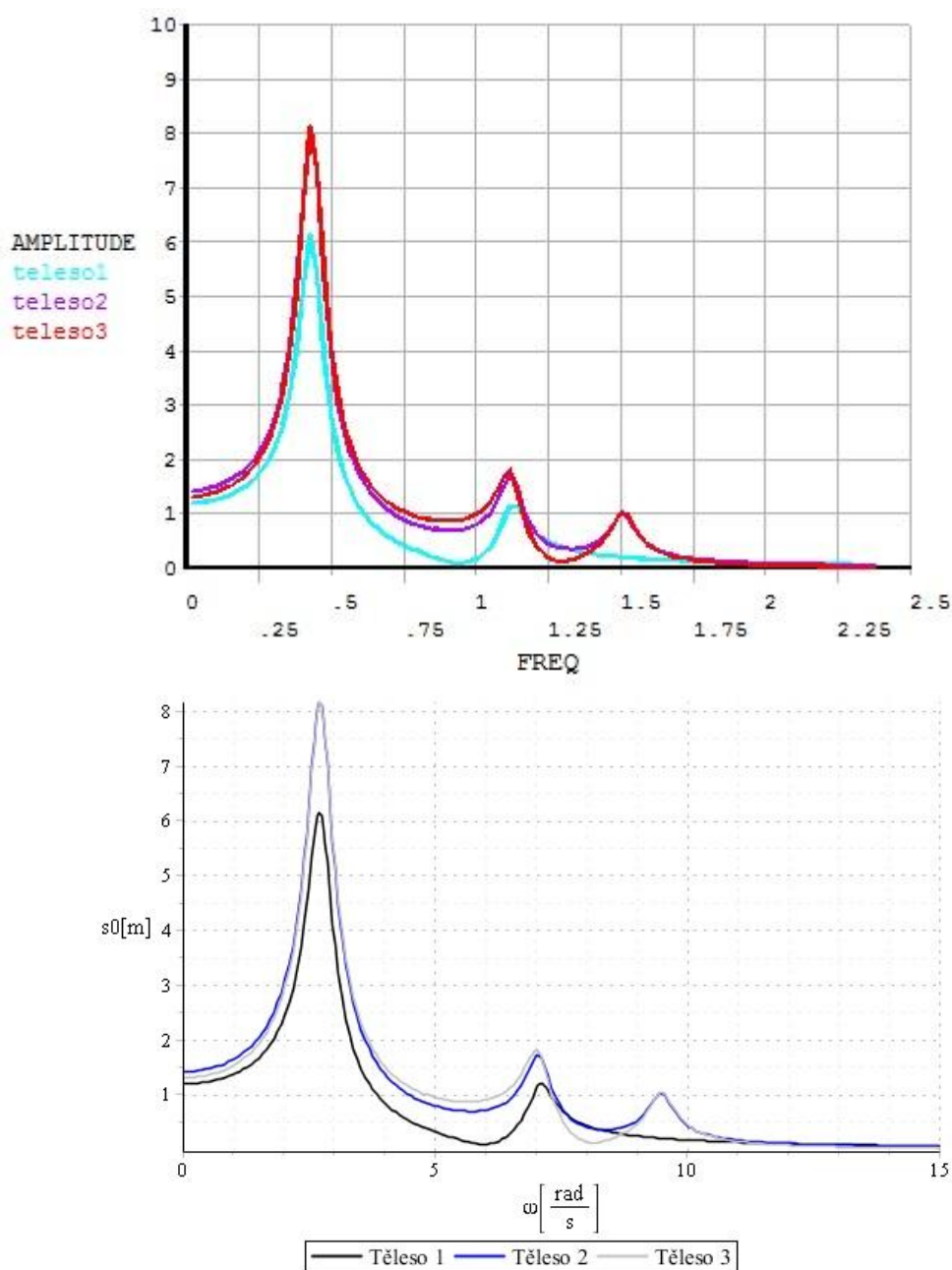


Obr. 4-13 Amplitudová charakteristika – změna tuhosti pružiny mezi tělesy 1 a 3

5 SROVNÁNÍ ANALYTICKÉHO ŘEŠENÍ S MKP

Zadaná kmitající soustava byla také vyřešena v programu ANSYS. Výpočty v tomto programu jsou založeny na numerické metodě konečných prvků. Princip této metody spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do určitého (konečného) počtu prvků. Parametry soustavy byly zvoleny stejné jako na začátku kapitoly 4. Pro zjištění vlastních frekvencí byla využita modální analýza, pro amplitudo-frekvenční charakteristiku analýza harmonická.

Na následujících obrázcích je zachyceno srovnání analytického řešení programem MAPLE s numerickým řešením v ANSYSu:



Obr. 5-1 Srovnání amplitudových charakteristik pro výchozí parametry v programu ANSYS (nahore) a MAPLE (dole)

Vlastní frekvence zjištěné analyticky vyjádříme v Hz:

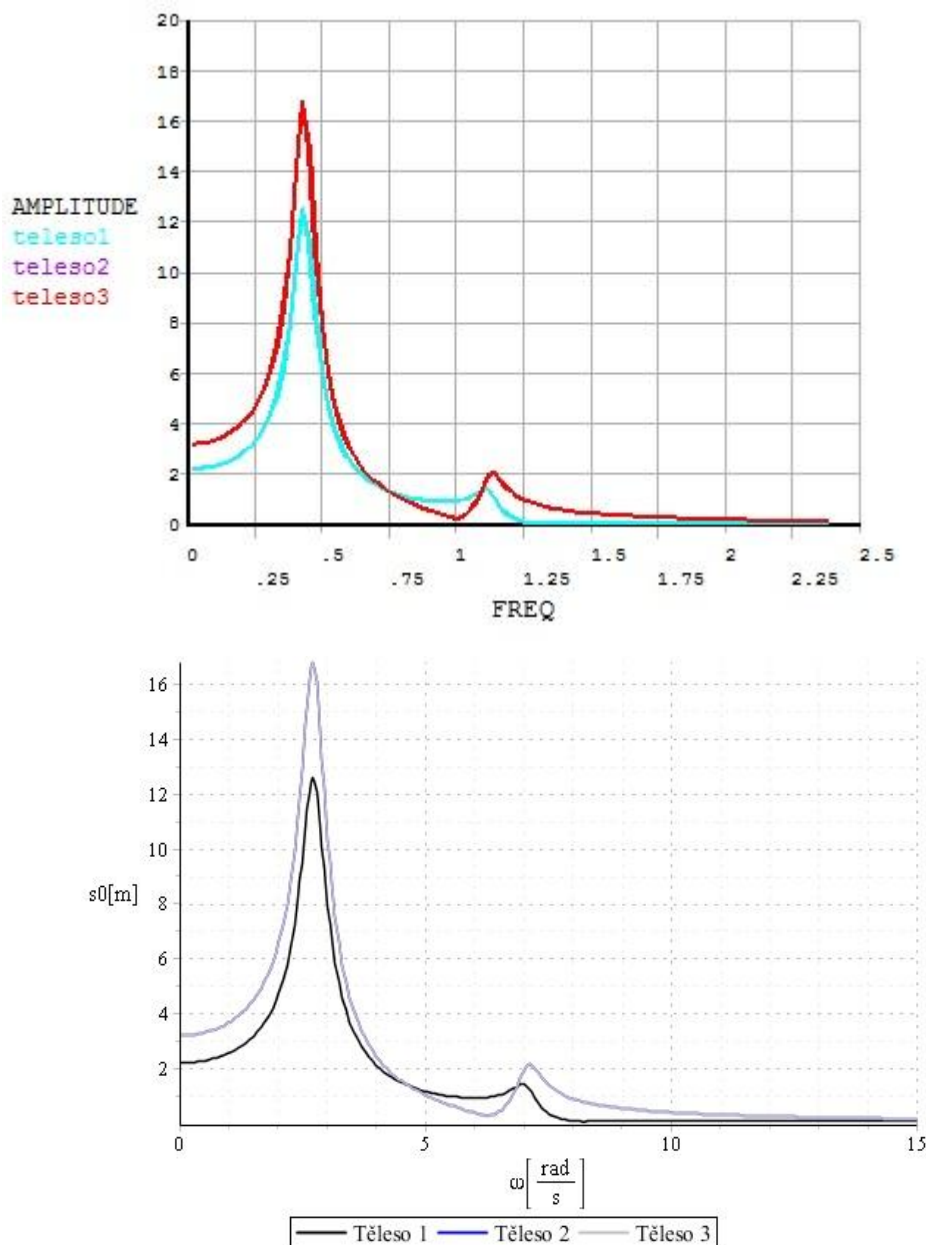
$$f_{01} = 0,43 \text{ Hz}$$

$$f_{02} = 1,13 \text{ Hz}$$

$$f_{03} = 1,51 \text{ Hz}$$

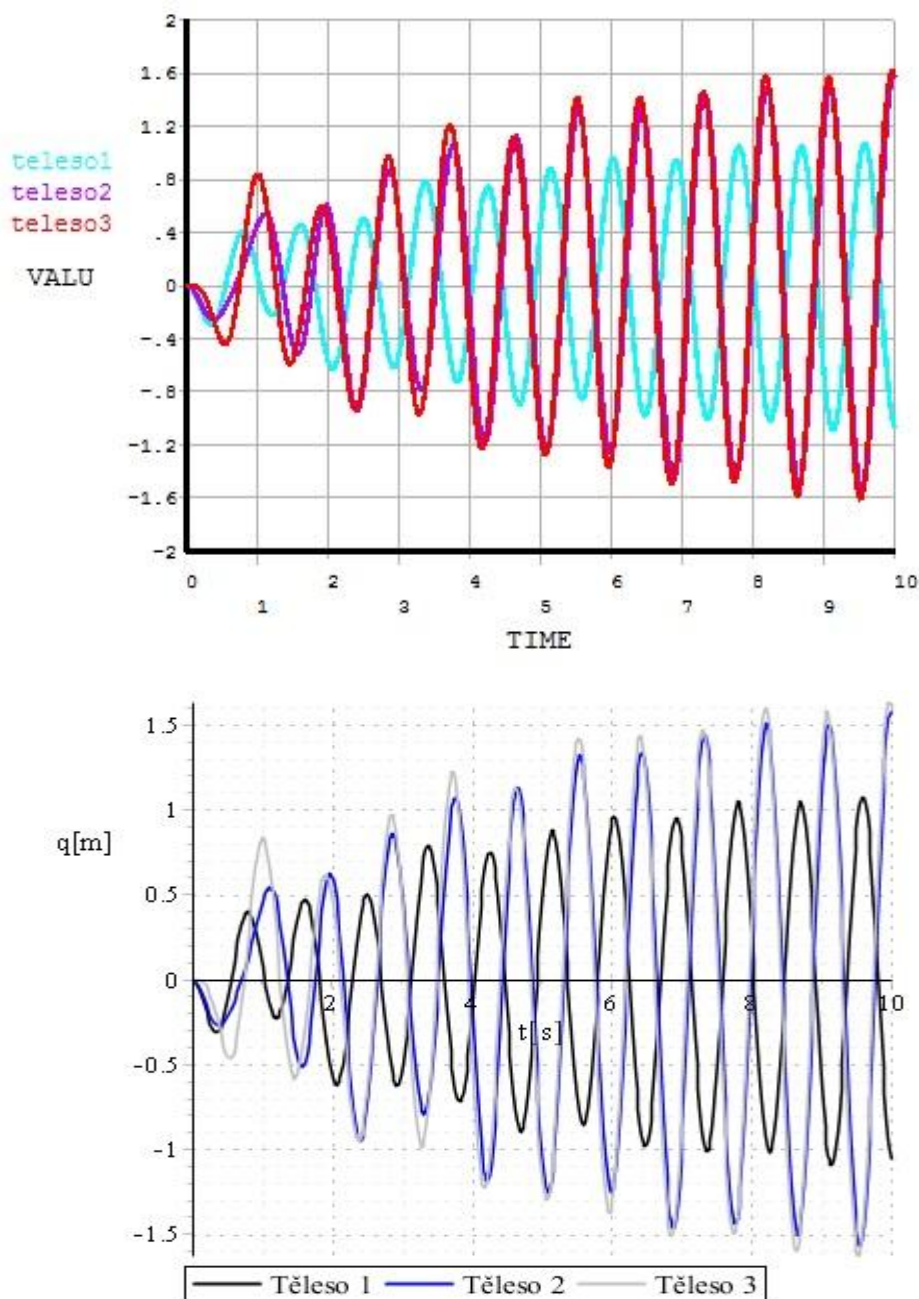
S přihlédnutím k měřítku srovnávaných grafů a skutečnosti, že frekvence v grafu z ANSYSu jsou v Hz, vidíme jasnou shodu řešení obou programů.

Další srovnání se týká totožných charakteristik těles 2 a 3 při stejných hodnotách jejich budících sil ($F_2(t) = F_3(t) = 30 \cdot \cos(\omega t + 0)$). Opět můžeme konstatovat shodu v řešení.



Obr. 5-2 Srovnání amplitudových charakteristik pro stejně velké budící síly na tělesech 2 a 3 v programu ANSYS (nahore) a MAPLE (dole)

Na závěr je provedeno srovnání závislosti výchylek těles na čase při buzení rezonanční frekvencí. V ANSYSu byla k tomuto výpočtu využita transientní analýza. Obě řešení jsou numerická s tím rozdílem, že v programu MAPLE byly pro výpočet použity pohybové rovnice. Shoda je patrná z následujícího obrázku:



Obr. 5-3 Srovnání výchylek těles v závislosti na čase pro rezonanční budící frekvenci v programu ANSYS (nahore) a MAPLE (dole)

ZÁVĚR

V této práci jsou předloženy výsledky analýzy kmitající dynamické soustavy se třemi stupni volnosti. Sestrojení pohybových rovnic bylo využito pro analytické řešení v programu MAPLE. Toto řešení je koncipováno tak, aby bylo možno měnit vstupní parametry budících sil, tuhostí a tlumení. Jejich vliv na chování soustavy je následně probrán a zobrazen v grafech amplitudových charakteristik.

Znalost amplitudových charakteristik (a z nich vyplývajících vlastních frekvencí) je v praxi velmi důležitá z hlediska zabránění vzniku rezonancí škodlivých pro chod většiny strojů. Reálné soustavy jsou však obvykle mnohem složitější a analytické řešení pohybových rovnic by se stávalo se vzrůstajícím počtem stupňů volnosti velmi komplikovaným. Proto se v dnešní době využívá spíše software založený na metodě konečných prvků, např. ANSYS.

Z vlastního pohledu hodnotím řešení v ANSYSu jako časově méně náročné a také méně náchylné k chybám.

SEZNAM POUŽITÝCH ZDROJŮ

- [1] KOŽEŠNÍK, Jaroslav. *Kmitání mechanických soustav*. 1. vydání. Praha: Academia, 1979.
- [2] KRATOCHVÍL, Ctirad a Jaromír SLAVÍK. *Mechanika těles: dynamika*. 2. vydání. Brno: CERM, 2007. ISBN 80-214-2260-2.
- [3] BREPTA, Rudolf, Ladislav PŮST a František TUREK. *Mechanické kmitání*. 1. vydání. Praha: Sobotáles, 1994. ISBN 80-901684-8-5.
- [4] SLAVÍK, Jaromír. *Počítačové metody mechaniky* [online]. 2001 [cit. 2013-05-01]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/img/fckeditor/file/opory/slavik/POCME.HTML>
- [5] MALENOVSKÝ, Eduard. *Počítačové metody mechaniky v dynamice* [online]. 22. 9. 2008 [cit. 2013-05-01]. Dostupné z: http://www.umt-old.fme.vutbr.cz/~pkrejci/opory/pmm_dyn/index.html
- [6] PELLANT, Karel. *Technická mechanika* [online]. [cit. 2013-05-01]. Dostupné z: <http://www.umt.fme.vutbr.cz/~kpellant/>

SEZNAM POUŽITÝCH SYMBOLŮ

Symbol	Význam	Jednotka
A	integrační konstanta	-
B	integrační konstanta	-
\mathbf{B}	matice tlumení	$N.m^{-1}.s^{-1}$
C	integrační konstanta	-
b_i	součinitel útlumu pro i-tý tlumič	$N.m^{-1}.s^{-1}$
E_D	disipativní energie	J
E_k	kinetická energie	J
E_p	potenciální energie	J
f	frekvence	Hz
F_i	amplituda i-té síly	N
k_i	tuhost i-té pružiny	$N.m^{-1}$
k_y	zobecněná tuhost	$N.m^{-1}$
\mathbf{K}	matice tuhosti	$N.m^{-1}$
m_i	hmotnost i-tého tělesa	kg
m_y	zobecněná hmotnost	kg
\mathbf{M}	matice hmotnosti	kg
q_i	poloha i-tého tělesa	m
\dot{q}_i	rychlost i-tého tělesa	$m.s^{-1}$
\ddot{q}_i	zrychlení i-tého tělesa	$m.s^{-2}$
\mathbf{q}	vektor poloh	m
$\dot{\mathbf{q}}$	vektor rychlostí	$m.s^{-1}$
$\ddot{\mathbf{q}}$	vektor zrychlení	$m.s^{-2}$
\mathbf{q}_h	homogenní řešení	m
\mathbf{q}_p	partikulární řešení	m
Q_i	amplituda i-té síly	N
\mathbf{Q}	vektor amplitud budících sil	N
s_0	amplituda odezvy	m
$\tilde{\mathbf{s}}$	komplexní vektor amplitud	m
t	čas	s
T	perioda	s
\mathbf{u}	vektor amplitud	m
\mathbf{v}	normovaný vektor amplitud	m
\mathbf{V}	modální matice	m
α	konstanta proporcionálního tlumení	s^{-1}
β	konstanta proporcionálního tlumení	s
δ	konstanta dozrívání	s^{-1}
λ	vlastní hodnota	-
φ	fázový posun	rad
φ_p	fáze odezvy	rad
ω	úhlová budící frekvence	$rad.s^{-1}$
Ω	vlastní úhlová frekvence tlumeného kmitání	$rad.s^{-1}$
Ω_0	vlastní úhlová frekvence netlumeného kmitání	$rad.s^{-1}$
$\mathbf{\Omega}_0^2$	spektrální matice	$rad^2.s^{-2}$

SEZNAM PŘÍLOH

Příloha 1	analyticke_reseni.mw	soubor řešení v programu MAPLE
Příloha 2	složka „ansys“	soubory řešení v programu ANSYS